حل نموذج بجروت

(803)–382

موعد شتاء 2022

طاقم الرياضيات

www.IQsmart.co.il

معهد IQ

سؤال 1

بحسب المعطيات

سعر المبيت للبالغ لليلة واحدة في الفندق أعلى بـ 85 شيكل من سعر المبيت لليلة واحدة للولد.

نفرض سعر المبيت للولد هو x شيكل

اذاً:

سعر المبيت للبالغ هو $x+85$ شيكل.

بحسب المعطى:

دفعت العائلة على كل بالغ سعر كامل.

وعلى كل ولد حصلت على تخفيض 32% اي دفعت

$100\%-32\% \leftarrow 68\%$ من سعر الولد اي $68\% \cdot x$ او $0.68x$

نبني جدول يعبر عن التكلفة الكلية

		تكلفة المبيت للواحد	تكلفة كلية
عدد البالغين	2	$x+85$	$2(x+85) = 2x+170$
عدد الاولاد	3	$0.68x$	$3(0.68x) = 2.04x$

بحسب المعطيات، التكلفة الكلية التي دفعتها العائلة هو 1361.8

اي يتحقق: $2x+170+2.04x=1361.8$

$4.04x+170=1361.8$

$4.04x=1361.8-170$

$4.04x=1191.8 \rightarrow x=\frac{1191.8}{4.04}=295$

اذاً سعر المبيت للولد الواحد قبل التخفيض هو $x=295$

www.IQsmart.co.il

سعر المبيت للبالغ: $x+85 \Leftarrow 295+85 = 380$ شيكل

اذا للتلخيص:

* تكلفة ليلة مبيت للولد 295 شيكل.
* تكلفة ليلة مبيت للبالغ 380 شيكل.

ب.1

اذا لم تحصل العائلة على تخفيض كانت ستدفع

$380 \times 2 = 760$ شيكل على البالغين

$295 \times 3 = 885$ شيكل على الاولاد

$\boxed{\text{المجموع} = 1645 \text{ شيكل}}$

ب.2

التخفيض الكلي كان مقداره:

$$1645 - 1361.8 = 283.2$$

نسبة التخفيض هي:

$$\frac{283.2}{1645} = 0.1722$$

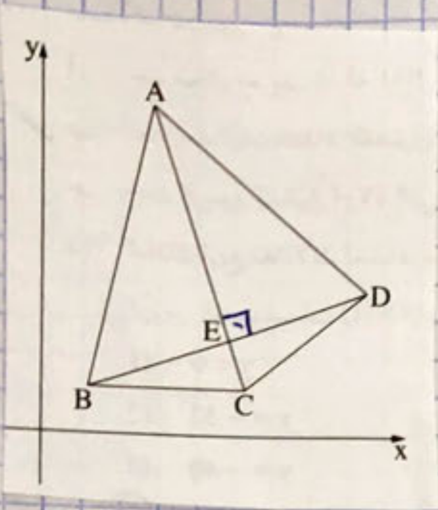
نحول الكسر العشري لنسبة مئوية - نضرب بـ100

$$0.1722 \cdot 100\% = \boxed{17.22\%}$$

اذا نسبة التخفيض الكلية:

$\boxed{17.22\%}$

www.IQsmart.co.il



سؤال 2

بحسب المعطيات :-

ABCD شكل رباعي أقطاره متعامدة

اي : $AC \perp BD$ وبالتالي حاصل

ضرب ميليهما هو -1.

$(\text{ميل } AC)(\text{ميل } BD) = -1$

E هي نقطة تقاطع الاقطار.

• E منتصف BD واحداثياتها $E:(12,6)$

* معادلة AC هي $AC: y=-3x+42$

* معادلة AB هي $AB: y=4.5x-10.5$

أ- معطى أن الاحداثي x للرأس A هو 7 $\Leftarrow A(7,y_A)$

النقطة A تقع على المستقيم $AC: y=-3x+42$

نعوض $x=7$ ونجد y_A :-

$$y_A=-3\cdot 7+42=-21+42=21$$

$\boxed{A:(7,21)}$ $\boxed{y_A=21}$

ب. BD تعامد AC لذلك: $\text{ميل } BD = \frac{-1}{\text{ميل } AC}$

اذاً $\text{ميل } BD = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

اذاً القطر BD ميله $\frac{1}{3}$ ويمر ب $E:(12,6)$

$$BD: y=mx+n$$

$$BD: y=\frac{1}{3}x+n \xRightarrow{(E)} 6=\overbrace{\frac{1}{3}\cdot 12}^{4}+n$$

$$\Rightarrow 6-4=n \Rightarrow \boxed{2=n}$$

$$\boxed{BD: y=\frac{1}{3}x+2}$$

1. أ معادلة $AB: y = 4.5x - 10.5$

B هي تقاطع المستقيمين AB و BD .

$$\begin{cases} AB: y = 4.5x - 10.5 \\ BD: y = \frac{1}{3}x + 2 \end{cases}$$

نحل معادلتين بمتغيرين :-

$$3 / \frac{1}{3}x + 2 = 4.5x - 10.5 \quad /3$$

$$x + 6 = 13.5x - 31.5$$

$$6 + 31.5 = 13.5x - x$$

$$37.5 = 12.5x$$

$$\frac{37.5}{12.5} = x$$

$$\boxed{3 = x_B}$$

نجد y:

$$y = 4.5x - 10.5$$

$$y_B = 4.5 \cdot 3 - 10.5 = 13.5 - 10.5$$

$$\boxed{y_B = 3}$$

$$B(3,3)$$

2. أ $B(3,3)$ $E(12,6)$ و E منتصف BD

$$x_E = \frac{x_B + x_D}{2} \qquad y_E = \frac{y_B + y_D}{2}$$

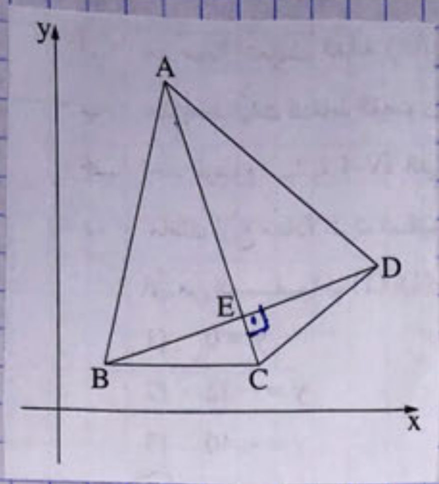
$$\cdot 2 / 12 = \frac{3 + x_D}{2} \; /\cancel{2} \qquad \cdot 2 / 6 = \frac{3 + y_D}{2} \; /\cancel{2}$$

$$24 = 3 + x_D \qquad 12 = 3 + y_D$$

$$24 - 3 = x_D \qquad 12 - 3 = y_D$$

$$\boxed{21 = x_D} \quad \boxed{D(21,9)} \quad \boxed{9 = y_D}$$

www.iQsmart.co.il



د. معطى أنّ BC يوازي المحور X
أي أنّ الإحداثي y متساوي
في B و C (نفس الإحداثي y)

$\boxed{y_c=3} \Leftarrow B:(3,3)$

C تقع على AC :-

$AC: y = -3x + 42$

$3 = -3x + 42$

$3 - 42 = -3x$

$\Rightarrow -39 = -3x \Rightarrow \frac{-39}{-3} = x$

$\Rightarrow \boxed{13 = x}$

$\boxed{C:(13,3)}$

د.2 سنبرهن ان المثلث BCD متساوي الساقين بطريقتين:

الطريقة الأولى:

بحسب المعطيات E منتصف BD
و CE عمودي على BD
وبالتالي في المثلث BCD، CE هو ارتفاع ومتوسط
في نفس الوقت وبالتالي المثلث متساوي الساقين BC=DC

www.iQsmart.co.il

الطريقة الثانية

نحسب طول CD وطول BC

$B(3,3)$
$C:(13,3)$ $\Rightarrow BC = 13 - 3 = 10$ (موازي لـ x)

$D(21,9)$
$C:(13,3)$ $\Rightarrow DC = \sqrt{(21-13)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2}$

$DC = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

اذاً: $BC = DC = 10$

والمثلث BDC متساوي الساقين.

سؤال 3

بحسب المعطيات:

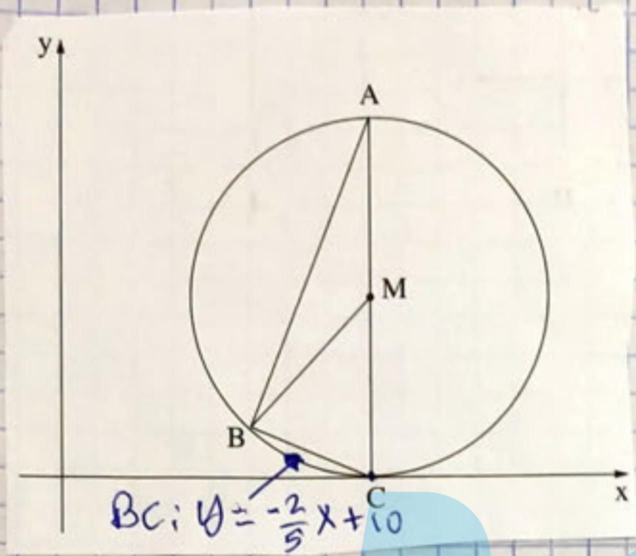
النقطة C تقع على المحور X

أي الاحداثي y هو 0

$C:(X_C,0)$

C تقع على المستقيم BC

$BC: y=-\frac{2}{5}x+10$



نعوض $y=0$ ونجد X_C

$$0=-\frac{2}{5}X_C+10$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{5}X_C=10 \xrightarrow[(\times\frac{5}{2})]{} \frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}X_C=\frac{10\cdot 5}{2}$$

$$\boxed{X_C=25}$$

اذاً $\boxed{C:(25,0)}$

ب.1) بحسب المعطى $AC=29$, AC يعامد المحور X

لذلك $AC=y_A-y_C$

$$\Longrightarrow 29=y_A-0 \Longrightarrow \boxed{y_A=29}$$

بما أن AC يعامد المحور X اذاً النقطة A والنقطة C يوجد نفس الاحداثي X اذاً $\boxed{A(25,29)}$

ب.2) AC هو القطر أي $AC=2R \leftarrow 29=2R \leftarrow \boxed{14.5=R}$

نجد مركز الدائرة

مركز الدائرة هو منتصف AC

$X_M=X_A=X_C=25$ لأن AC يعامد المحور X.

$$\Longrightarrow y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=y_M=\frac{29+0}{2}=14.5$$

اذاً احداثيات M هي $\boxed{M:(25,14.5)}$

www.IQsmart.co.il

معادلة الدائرة:

$$(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=R^2$$

$$(x-25)^2+(y-14.5)^2=(14.5)^2$$

$$\boxed{(x-25)^2+(y-14.5)^2=210.25}$$

1.ج معطى أن AB يُعامد BC لذلك

$$\text{ميل } AB=\frac{-1}{\text{ميل } BC}$$

$$\Rightarrow \text{ميل } AB=\frac{-1}{-\frac{2}{5}}=\frac{5}{2}=2.5$$

AB يمر بالنقطة A(25,29) وميله 2.5 لذلك معادلته تحقق:

$$y=ax+b$$

$$29=2.5(25)+b$$

$$29=62.5+b$$

$$29-62.5=b \Longrightarrow \boxed{-33.5=b}$$

معادلة AB ⟵ $AB: \boxed{y=+2.5x-33.5}$

2.ج B هي تقاطع AB مع BC ⟵ نحل معادلتين بمتغيرين ونجد إحداثيات B.

$$AB: y=2.5x-33.5$$

$$BC: y=-\frac{2}{5}x+10$$

$$\Longrightarrow 2.5x-33.5=-\frac{2}{5}x+10$$

$$\Rightarrow 2.5x+\underbrace{\frac{2}{5}}_{0.4}x=10+33.5 \Longrightarrow 2.9x=43.5$$

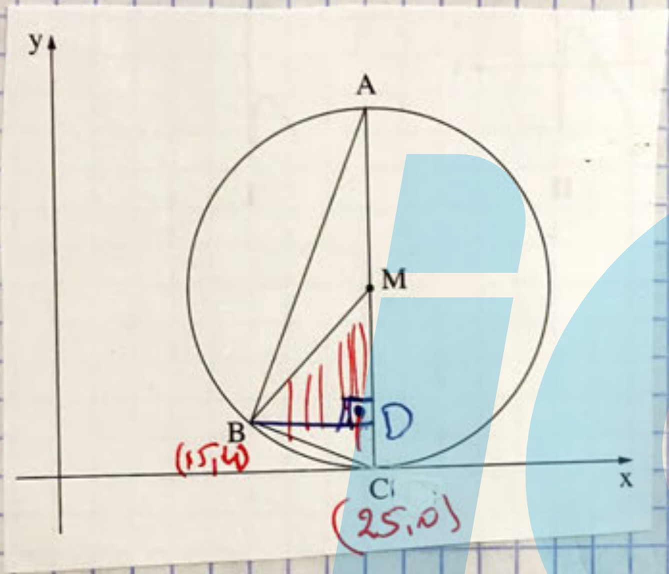
$$\boxed{x=\frac{43.5}{2.9}=15}$$

إذاً $X=15$ نجد y :-

$$y=-\frac{2}{5}x+10 \longrightarrow y=-\frac{2}{5}(15)+10$$
$\boxed{x=15}$

$$\to y=\frac{-30}{5}+10=-6+10=4 \quad \boxed{y=4}$$

إذاً $\boxed{B:(15,4)}$



$\boxed{B.P}$ مساحة المثلث BMC

نرسم من B ارتفاع
نازل على MC

BD هو ارتفاع المثلث
وبالتالي:

$$S_{\Delta BMC}=\frac{MC\cdot BD}{2}$$

MC هو نصف قطر الدائرة أي $R=MC=14.5$

الاحداثي y للنقطة D هو نفسه الاحداثي y للنقطة B
والاحداثي x للنقطة D هو نفسه الاحداثي x للنقطة C

لذلك: $D:(25,15)$

$$BD=X_D-X_B=25-15=10$$

إذاً $BD=10$

$$\underset{\Delta AMC}{\text{مساحة}}=\frac{BD\cdot MC}{2}=\frac{10\cdot(14.5)}{2}=72.5$$ وحدة مربعة

$$\boxed{\underset{\Delta BMC}{\text{مساحة}}=72.5}$$

www.IQsmart.co.il

سؤال 4

$$f(x)=4x+\frac{9}{x}-20$$

أ. مجال تعريف الدالة $x\neq 0$ (المقام لا يمكن ان يكون 0)

ب. النقاط القصوى تحقق: $f'(x)=0$

$$f'(x)=4\cdot 1+9\left(-\frac{1}{x^2}\right)-0 \Rightarrow \boxed{f'(x)=4-\frac{9}{x^2}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 4-\frac{9}{x^2}=0 \Rightarrow 4=\frac{9}{x^2} \quad /\cdot x^2$$

$$4x^2=9 \Rightarrow x^2=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x=\pm\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{x_1=1.5} \quad \boxed{x_2=-1.5}$$

نجد الاحداثي y للنقاط بنعوض بالدالة

$$f(x)=4x+\frac{9}{x}-20$$

$$f(1.5)=4(1.5)+\frac{9}{1.5}-20=6+6-20=-8$$

$$\boxed{(1.5,-8)}$$

www.IQsmart.co.il

$$f(-1.5)=4(-1.5)+\frac{9}{-1.5}-20=-6-6-20=-32$$

$$f(-1.5)=-32 \Rightarrow \boxed{(-1.5,-32)}$$

نفحص النقاط ونحدد نوعها بواسطة جدول

$\Longleftarrow$

$\longrightarrow x$: -1.5, 0, 1.5

x	$x<-1.5$ ($x=-2$)	-1.5	$-1.5<x<0$ ($x=-1$)	0	$0<x<1.5$ ($\boxed{x=1}$)	1.5	$x>1.5$ ($\boxed{x=2}$)
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$\wr$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-32 max	↘	$\wr$	↘	-8 min	↗

$$f'(x)=4-\frac{9}{x^2}$$

$$f'(-2)=4-\frac{9}{(-2)^2}=4-\frac{9}{4}=4-2\frac{1}{4}=1\frac{3}{4}>0$$

$$f'(-1)=4-\frac{9}{(-1)^2}=4-\frac{9}{1}=4-9=-5<0$$

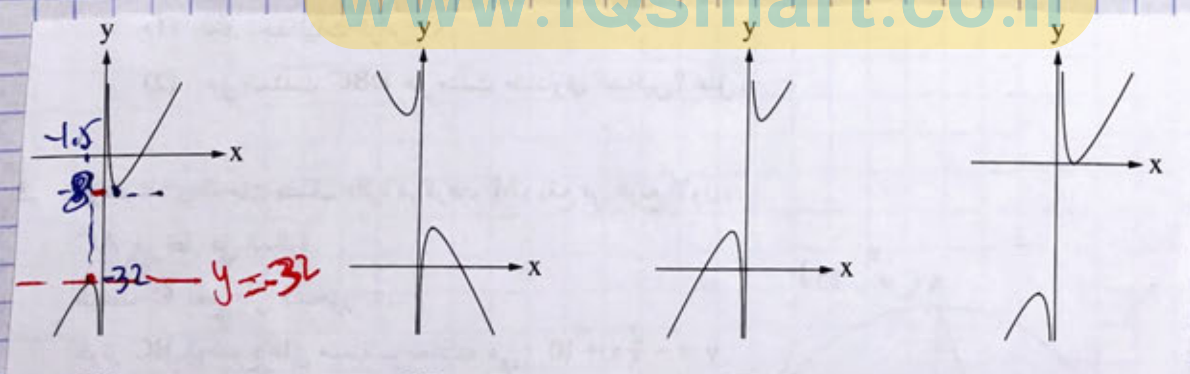
$$f'(1)=4-\frac{9}{1^2}=4-9=-5<0$$

$$f'(2)=4-\frac{9}{2^2}=4-\frac{9}{4}=4-2.25=1.75>0$$

لذا: $(1.5,-32)$ מינימום

$(-1.5,-8)$ מקסימום

4

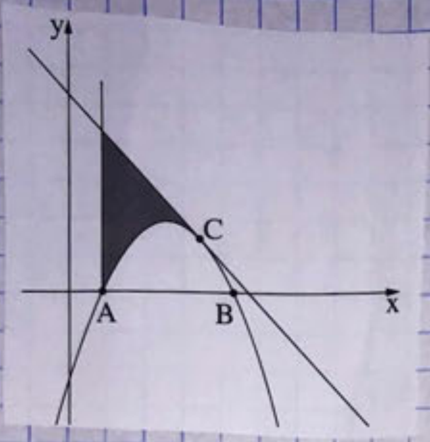


IV III II I

الأحداثي y لنقطة ال מקסימום وال מינימום سالب ولذلك النقطتان يجب ان تكونا تحت المحور x ⟸ وهذا فقط في IV

(5) المستقيم الذي يقطع الرسم لـ f(x) في نقطة واحدة يجب ان يمر بنقطة ال מקסימום او מינימום وفقط $\boxed{y=-32}$ يحقق هذا الشرط.

سؤال 5



$$y=-x^2+6x-5$$

أ) A و B هي تقاطع الدالة مع المحور x

أي $y=0$ ← نعوض $y=0$

في الدالة :

$$0=-x^2+6x-5$$

وهذه معادلة تربيعية نحلها حسب الدستور

$$0=-x^2+6x-5 \Longrightarrow x^2-6x+5=0$$

$$a=1,\ b=-6\ \ c=5$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\mp\sqrt{(-6)^2-4(1)(5)}}{2\cdot 1}$$

$$x_{1,2}=\frac{6\mp\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\mp\sqrt{16}}{2}=\frac{6\mp 4}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{\overset{10}{\cancel{6+4}}}{2}=5 \Longrightarrow \boxed{x_1=5}$$

$$x_2=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1 \Longrightarrow \boxed{x_2=1}$$

www.IQsmart.co.il

بما أن B على يمين A لذلك الإحداثي x لـ B أكبر من الإحداثي x لـ A اذاً : $\boxed{B:(5,0)\ \ A:(1,0)}$

ب) C هي نقطة التماس ودينا $x_c=4$ $C:(4,y_c)$

نجد y_c :

$$y_c=-(4)^2+6\cdot 4-5$$

$$y_c=-16+24-5=3$$

$$\boxed{C:(4,3)}$$

النقطة C تقع على الدالة والمماس

نجد ميل المماس $\Longleftarrow$ ميل المماس $= f'(4)$

نجد اولاً $f'(x)$:-

$$f'(x) = -2x+6$$

ميل المماس $= f'(4) = -2\cdot 4+6 = -8+6 = -2$

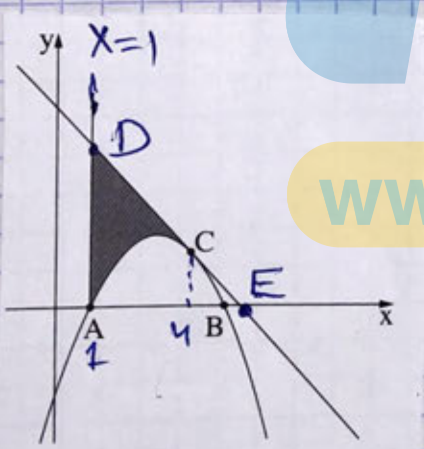
اذا المماس للدالة في C يمر بـ $C:(4,3)$
وميله $m=-2$. معادلته من الصورة :-

$$y = mx+n$$

نعوض C و $m=-2$ $\Longrightarrow 3 = -2\cdot 4+n \Longrightarrow 3 = -8+n$

$$\Longrightarrow 3+8 = n \Longrightarrow \boxed{11 = n}$$

اذاً معادلة المماس هي $\boxed{y=-2x+11}$



P. معادلة العمود الذي يمر من النقطة A هي $\boxed{x=1}$ نفس الاحداثي x لـ A

المساحة الرمادية هي:

المساحة بين المماس والدالة
من $x=1$ وحتى $x=4$
اي نتحقق: $S = \int_1^4 (-2x+11)dx - \int_1^4 (-x^2+6x-5)dx$

$$S = \left[-x^2+11x\right]_1^4 - \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{\cancel{6}^{3}x^2}{\cancel{2}}-5x\right]_1^4$$

$$\left[-x^2+11x\right]_1^4 = (-4^2+11\cdot 4)-(-1^2+11\cdot 1) = \overbrace{\left[-16+44\right]}^{28} - \overbrace{\left[-1+11\right]}^{10} = 18$$

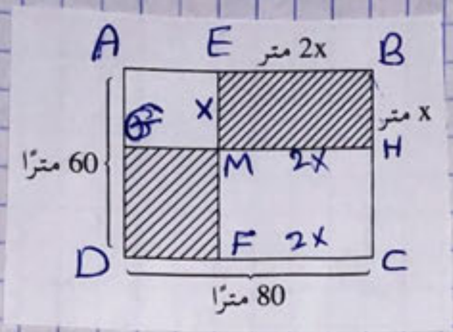
$$\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2-5x\right]_1^4 = \left[\frac{-4^3}{3}+3\cdot 4^2-5\cdot 4\right] - \left[\frac{-1^3}{3}+3\cdot 1^2-5\cdot 1\right] = 9$$

$$\underbrace{\left(\frac{-64}{3}+48-20\right)}_{6.666} - \underbrace{\left[\frac{-1}{3}+3-5\right]}_{-2.333} \rightarrow \boxed{9}$$

www.IQsmart.co.il

سؤال 6

أ. نرمز لرؤوس المستطيل بـ A, B, C, D
للمستقيمين BH و EF ونقطة
تقاطعهم بـ M.



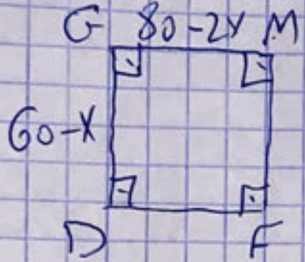
$BC = AD = 60$

$EM = BH = x$

$GD = 60 - x = MF$

$GM = DF = 80 - 2x$

اذًا المستطيل الأسفل $GMFD$ أطواله هي:

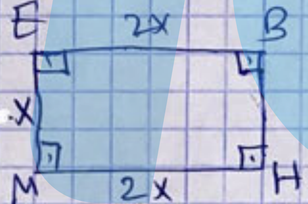


$GM = DF = 80 - 2x$

$GD = MF = 60 - x$

ب. المساحتين المعشبتين للحديقة عبارة عن المستطيلين:
$EBHM$ و $GMFD$.

أطوال المستطيل $EBHM$ هي:



مساحة المستطيل $EBHM$
هي: $x \cdot 2x = 2x^2$

مساحة المستطيل $GMFD$ هي $(60-x)(80-2x)$

الدالة التي تعبر عن مساحة الحديقتين هي:

$$F(x) = x \cdot 2x + (60-x)(80-2x)$$

$$F(x) = 2x^2 + 4800 - 80x - 120x + 2x^2$$

$$\boxed{F(x) = 4x^2 - 200x + 4800}$$

اذًا الدالة التي تعبر عن المساحة هي:
(مساحة الحديقتين)

www.IQsmart.co.il

نجد النقطة القصوى للدالة :

$F'(x)=0$

$F(x)=4x^2-200x+4800$

$F'(x)=8x-200=0 \rightarrow 8x=200$

$x=\frac{200}{8}=25$

نفحص هل $X=25$ هو نقطة نهاية صغرى (MIN مينيمم)

x	24	25	26
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘		↗

$f'(24)=8\cdot24-200$

$f'(24)=\underbrace{192-200}_{-8}<0$

$f'(26)=\underbrace{8\cdot26}-200$

$\underbrace{208-200}_{8}>0$

اذا x الذي يعطينا اصغر مساحة هو $\boxed{X=25}$

ب - المساحة المعدة للبناء هي مساحة المشتغل كله وتطرح منها مساحة الحدائق

الدالة $F(x)$ تعبر عن مساحة الحدائق لكل x

www.IQsmart.co.il

$F(x)=4x^2-200x+4800$

$F(25)=4\cdot(25)^2-200\cdot25+4800$

$F(25)=\underbrace{4\cdot625}_{2500}-5000+4800=2300$

مساحة المشتغل هي: $60\cdot80 \leftarrow 4800$

مساحة الحدائق $-\ 2300$

المساحة المعده للبناء 2500